

sical systems (no degeneracy), we can assume the equation of state $p = n k T$. This approximation is consistent with the simplifying assumptions used by HUND. With T in degrees Kelvin, p in atmospheres and $\ln A \sim 10$ the ratio (13) becomes

$$R \approx 10^{-47} T^{13/2} / p. \quad (14)$$

In the $\log p - \log T$ diagram the curve $R = 1$ corresponds to the straight line

$$\log T = \frac{2}{13} \log p + 7.2. \quad (15)$$

It is seen that there is a region around the point $p \approx 10^{16}$ atm, $T \approx 10^9$ °K ($n \approx 10^{29}$ cm $^{-3}$) where relativistic kinematics become important, but the influence of a thermal radiation field can be neglected.

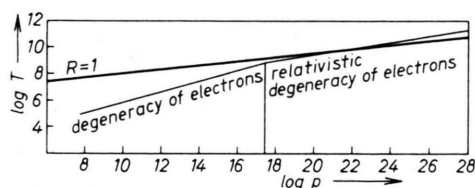


Fig. 1. Boundaries of states of a free electron gas.

From (13) one might think that one must only reduce the electron density sufficiently to get a $R > 1$. But normally those dilute plasmas (belonging to the upper left part of the diagram) are not extended enough to contain the radiation emitted, so that the radiation energy density remains much smaller than that of the corresponding thermal radiation field.

Diffusion von Testteilchen in einem relativistischen Elektronenplasma

KLAUS ELSÄSSER

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, 8 München 23, Föhringer Ring 6

(Z. Naturforschg. **22 a**, 147—152 [1967]; eingegangen am 20. Oktober 1966)

Herrn Prof. L. BIERMANN zum 60. Geburtstag gewidmet

The dynamical friction and diffusion coefficients of a relativistic electron plasma (kinetic energy $k \cdot T$ comparable with rest energy $m \cdot c^2$) are calculated in the LANDAU approximation. The deviations of these quantities from their classical limits are shown in Figs. 1—4 and interpreted mainly as kinematical effects due to the different relation between the kinetic energy and the velocity.

Die zeitliche Entwicklung eines klassischen Vielteilchen-Systems wird oft durch eine „kinetische Gleichung“ für die Ein-Teilchen-Verteilungsfunktion in guter Näherung beschrieben. Im Falle eines Plasmas ist die LANDAU-Gleichung die einfachste (vgl. z. B. BALESCU¹). Auch relativistische Elektronenplasmen (kinetische Energie kT von der Größenordnung der Ruhenergie mc^2) können so beschrieben werden, solange man den Einfluß der Strahlungskorrekturen vernachlässigen kann. In einer Arbeit von BISKAMP und PFIRSCH² wird der Einfluß der Strahlung durch einen Vergleich der Diffusionskoeffizienten eines Elektrons in einem thermischen Strahlungsfeld bzw. in einem strahlungslosen Elektronenplasma abgeschätzt. Für große Temperaturen ist es jedoch angebracht, die relativistische Kinematik der Elektronen zu berücksichtigen. Die einfach-

ste kinetische Gleichung, welche dies gewährleistet, ist die BELIAEV-BUDKER-Gleichung³, welche die relativistische Form der LANDAU-Gleichung darstellt. Die Berücksichtigung der Strahlung der Elektronen würde (bei Abwesenheit äußerer Felder) nur die Formfaktoren für die Abschirmung beeinflussen, welche hier jedoch gleich eins gesetzt und durch Abschneide-Parameter des Stoßintegrals ersetzt sind. Solange also keine quantenmechanische Entartung und keine starken äußeren Felder vorliegen, ist die BELIAEV-BUDKER-Gleichung eine konsistente Beschreibung eines relativistischen Elektronenplasmas; für eine räumlich homogene Verteilungsfunktion $f(t, \mathbf{u})$ lautet sie:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \cdot \left\{ \mathbf{A} f + \vec{B} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right\}, \quad (1)$$

¹ R. BALESCU, Statistical Mechanics of Charged Particles, Interscience Publishers, London, New York, Sydney 1963.

² D. BISKAMP u. D. PFIRSCH, Z. Naturforschg. **22 a**, 145 [1967].

³ S. T. BELIAEV u. G. I. BUDKER, Soviet Phys.-Doklady **1**, 218 [1956].



$$\mathbf{A} = -2n \left(\frac{e^2}{m} \right)^2 \int d^3k \mathbf{k} \int d^3u' \left(\frac{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{c^2 k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2} \right)^2 \cdot \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}, \quad (2)$$

$$\vec{\mathbf{B}} = 2n \left(\frac{e^2}{m} \right)^2 \int d^3k \mathbf{k} \int d^3u' \left(\frac{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{c^2 k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2} \right)^2 \cdot \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') f(t, \mathbf{u}'). \quad (3)$$

Hier sind n , e , m die Teilchendichte, Ladung und Masse der Elektronen, \mathbf{v} die Dreier-Geschwindigkeit und \mathbf{u} der räumliche Anteil der Vierergeschwindigkeit. Im folgenden betrachten wir jedoch nur eine linearisierte Form der Gl. (1), nämlich die FOKKER-PLANCK-Gleichung für das Testteilchenproblem, wie es von CHANDRASEKHAR in die nichtrelativistische Plasmaphysik eingeführt wurde (vgl. z. B. SPITZER⁴), indem wir die FOKKER-PLANCK-Koeffizienten für ein Gleichgewichtsplasma auswerten und mit den nichtrelativistischen Werten vergleichen.

I. Gleichgewichtsbedingung

Wie man leicht verifiziert, ist die relativistische MAXWELL-Verteilung (vgl. SYNGE⁵) eine stationäre Lösung von (1):

$$f_0(\mathbf{u}) = C \exp(-\gamma \sqrt{1 + \mathbf{u}^2/c^2}), \quad (4)$$

$$\gamma = m c^2 / k T = \text{const}, \quad (5)$$

$$C = \left[\int d^3u \exp(-\gamma \sqrt{1 + \mathbf{u}^2/c^2}) \right]^{-1} = (1/4 \pi c^3) \cdot (\gamma / K_2(\gamma)), \quad (6)$$

wobei $K_2(\gamma)$ die zweite modifizierte BESSEL-Funktion ist:

$$K_j(\gamma) = \int_0^\infty d\alpha \cosh(j\alpha) \exp(-\gamma \cosh \alpha), \quad j=0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Wir denken uns nun ein Plasma im Gleichgewicht, in das zusätzlich einige Teilchen, die „Testteilchen“ mit der Verteilungsfunktion $\varphi(t, \mathbf{u})$, gebracht werden. Die Thermalisierung dieser Teilchen wird dann größenordnungsmäßig bestimmt durch eine lineare kinetische Gleichung für φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \cdot \left\{ \mathbf{A} \varphi + \vec{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}} \right\}. \quad (8)$$

\mathbf{A} und $\vec{\mathbf{B}}$ sind Funktionale der Gleichgewichtsverteilung f_0 . Für $\varphi = f_0$ sind die Testteilchen offenbar

ebenfalls im Gleichgewicht. Daraus folgt eine Beziehung zwischen \mathbf{A} und $\vec{\mathbf{B}}$, welche unabhängig von (2) und (3) gelten muß. Setzen wir nämlich $\varphi \sim f_0$ und daher:

$$\partial \varphi / \partial \mathbf{u} = - (m \mathbf{v} / k T) \varphi, \quad (9)$$

so folgt aus der Bedingung $\partial \varphi / \partial t = 0$ nach (8) die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \cdot \left\{ \mathbf{A} - \vec{\mathbf{B}} \cdot \frac{m \mathbf{v}}{k T} \right\} - \frac{m \mathbf{v}}{k T} \cdot \left\{ \mathbf{A} - \vec{\mathbf{B}} \cdot \frac{m \mathbf{v}}{k T} \right\} = 0. \quad (10)$$

Da \mathbf{A} und $\vec{\mathbf{B}}$ nur von \mathbf{u} abhängen und für $u \rightarrow 0$ endlich bleiben sollen, können wir den Ansatz

$$\left\{ \mathbf{A} - \vec{\mathbf{B}} \cdot m \mathbf{v} / k T \right\} = (u / y^{3/2}) G(y), \quad (11)$$

$$y = (\mathbf{u})^2 \quad (12), \quad \lim_{y \rightarrow 0} G(y) = 0 \quad (13)$$

machen und erhalten aus (10) eine Differentialgleichung für $G(y)$:

$$G'(y) = (m/2 k T \sqrt{1 + y/c^2}) \cdot G(y). \quad (14)$$

Wegen der Anfangsbedingung (13) folgt daher

$$G(y) \equiv 0 \quad (15)$$

und damit die Beziehung

$$\mathbf{A} = \vec{\mathbf{B}} \cdot m \mathbf{v} / k T. \quad (16)$$

Es gilt also die gleiche Beziehung wie im nichtrelativistischen Fall. Natürlich wird sie auch von (2) und (3) erfüllt, wenn man $f = f_0$ setzt.

II. Fokker-Planck-Koeffizienten

Um anschauliche Größen zu erhalten, schreiben wir Gl. (8) in der üblichen Form einer FOKKER-PLANCK-Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \cdot \left\{ - \langle (\Delta \mathbf{u}) \rangle \varphi + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \cdot \langle (\Delta \mathbf{u}) (\Delta \mathbf{u}) \rangle \varphi \right\}. \quad (17)$$

Wie im nichtrelativistischen Fall (wo \mathbf{u} durch \mathbf{v} ersetzt ist) bedeutet $\langle (\Delta \mathbf{u}) \rangle$ den Mittelwert der Geschwindigkeitsänderung

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \quad (18)$$

eines Testteilchens der Geschwindigkeit \mathbf{u}_0 pro Zeit Δt , welche groß gegenüber der Dauer eines Stoßes und klein gegenüber der Relaxationszeit ist. Entsprechend stellt der Tensor $\langle (\Delta \mathbf{u}) (\Delta \mathbf{u}) \rangle$, wenn er

⁴ L. SPITZER, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publishers, Inc., New York 1956.

⁵ J. L. SYNGE, The Relativistic Gas, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1957.

in Diagonalform ist, das quadratische Mittel der Komponenten Δu_i pro Zeit Δt dar. Die in (17) auftretenden Größen sind also Reibungs- und Diffusionskoeffizienten des Plasmas; sie hängen mit den Größen \mathbf{A} und $\vec{\mathbf{B}}$ offensichtlich so zusammen:

$$\langle (\Delta \mathbf{u}) \rangle = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{B}} - \mathbf{A}, \quad (19)$$

$$\langle (\Delta \mathbf{u}) (\Delta \mathbf{u}) \rangle = 2 \vec{\mathbf{B}}. \quad (20)$$

Wenn wir also \mathbf{B} kennen, lassen sich alle FOKKER-PLANCK-Koeffizienten $\langle (\Delta \mathbf{u}) \rangle$, $\langle (\Delta \mathbf{u}) (\Delta \mathbf{u}) \rangle$ angeben und mit den nichtrelativistischen Werten vergleichen. Den Gleichgewichtswert von $\vec{\mathbf{B}}$ erhalten wir durch Einsetzen von (4) in (3):

$$\vec{\mathbf{B}} = 2 n \left(\frac{e^2}{m} \right)^2 C \int d^3 k \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}}{k^5} \int d^3 u' \cdot \left[1 - 2 \frac{\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{v}'_\perp}{c^2 - v_\parallel^2} + \frac{(\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{v}'_\perp)^2}{(c^2 - v_\parallel^2)^2} \right] \delta(v_\parallel - v'_\parallel) \exp(-\gamma \sqrt{1 + (\mathbf{u}'/c)^2}) \quad (21)$$

v_\parallel , \mathbf{v}_\perp sind die zu \mathbf{k} parallelen bzw. senkrechten Komponenten der Dreiergeschwindigkeit \mathbf{v} . Aus Symmetriegründen fallen alle in \mathbf{v}_\perp ungeraden Terme weg, und wir können die eckige Klammer ersetzen durch

$$[] \rightarrow \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(v_\perp)^2}{(c^2 - v_\parallel^2)^2} (v'_\perp)^2 \right]. \quad (22)$$

Die Integration über \mathbf{u}' können wir noch exakt ausführen und erhalten

$$\vec{\mathbf{B}} = 2 n \left(\frac{e^2}{m} \right)^2 C \int d^3 k \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}}{k^5} 2 \pi c^2 \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{2} \frac{(v_\perp)^2}{c^2 - v_\parallel^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - \tilde{\beta}^2 \right) \right] \left(\frac{e^{-\gamma \tilde{\beta}}}{\gamma} \right) \quad (23)$$

$$\text{mit} \quad \tilde{\beta} = [1 - (v_\parallel/c)^2]^{-1/2}, \quad (24)$$

Offensichtlich ist $\vec{\mathbf{B}}$ in Diagonalform, wenn wir das Koordinatensystem nach \mathbf{v} orientieren und z.B. die z-Achse in \mathbf{v} -Richtung legen. Es genügt dann, zwei Funktionen auszurechnen; hierfür nehmen wir die Spur von $\vec{\mathbf{B}}$:

$$B = \frac{1}{2} \langle (\Delta \mathbf{u})^2 \rangle \quad (25) \quad \text{und das Diagonalglied der } \mathbf{v}\text{-Richtung: } B_\parallel = \frac{1}{2} \langle (\Delta u_\parallel)^2 \rangle \quad (26)$$

Für die \mathbf{k} -Integration in (23) führen wir Kugelkoordinaten ein und erhalten nach Integration über $|\mathbf{k}|$ und den Winkel um die z-Achse:

$$\left\{ \begin{matrix} B \\ B_\parallel \end{matrix} \right\} = 4 n \left(\frac{e^2}{m} \right)^2 C (2 \pi c)^2 (\log \Lambda) \int_0^1 d\xi \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \xi^2 \end{matrix} \right\} \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \frac{1 - \xi^2}{1 - (v^2/c^2) \xi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - \frac{1}{1 - (v^2/c^2) \xi^2} \right) \right] \cdot \left(\frac{\exp(-\gamma/\sqrt{1 - (v^2/c^2) \xi^2})}{\gamma} \right). \quad (27)$$

Λ ist wie im nichtrelativistischen Fall das Verhältnis k_{\max}/k_{\min} der Abschnide-Parameter. Die Integrale über ξ lassen sich noch durch mehrere partielle Integrationen umformen und auf folgende beiden nicht mehr geschlossen darstellbaren Integrale zurückführen:

$$F_0(x, \gamma) = \int_0^x d\lambda \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\gamma} \right)^{-1/2} e^{-\lambda^2} \quad (28), \quad F_1(x, \gamma) = \int_0^x d\lambda \lambda^2 \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\gamma} \right)^{1/2} e^{-\lambda^2} \quad (29)$$

$$\text{mit} \quad \gamma = m c^2 / (k T), \quad (30) \quad x = [\gamma \cdot (\beta - 1)]^{1/2}, \quad (31) \quad \beta = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}. \quad (32)$$

Das Ergebnis dieser Umformungen drücken wir aus in Einheiten von B für ein ruhendes Testteilchen im Limes $c \rightarrow \infty$, also in

$$B_0 = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \lim_{v \rightarrow 0} = 4 \pi n \left(\frac{e^2}{m} \right)^2 \sqrt{\frac{2 m}{\pi k T}} \log \Lambda = \frac{1}{2} \langle (\Delta \mathbf{u})^2 \rangle_0 \quad (33)$$

und erhalten:

$$\frac{\langle (\Delta \mathbf{u})^2 \rangle}{\langle (\Delta \mathbf{u})^2 \rangle_0} = \frac{B}{B_0} = \frac{1}{g(\gamma)} \left[e^{-x^2} \left\{ \frac{3}{\gamma^2} (\beta \gamma + 1) - \frac{1}{\beta \gamma} \right\} + \frac{(2/\gamma)^{1/2}}{(v/c)} \left\{ \frac{2}{\gamma} \left(3 - \frac{1}{\beta^2} \right) F_1(x, \gamma) + \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \gamma^2} \right) F_0(x, \gamma) \right\} \right], \quad (34)$$

$$\frac{\langle (\Delta u_\parallel)^2 \rangle}{\langle (\Delta \mathbf{u})^2 \rangle_0} = \frac{B_\parallel}{B_0} = \frac{1}{g(\gamma)} \left[e^{-x^2} \left\{ \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma^2 (\beta^2 - 1)} \right\} + \frac{(2/\gamma)^{1/2}}{(v/c)^3} \left\{ \frac{2}{\gamma} F_1(x, \gamma) - \frac{1}{\beta^2 \gamma^2} F_0(x, \gamma) \right\} \right]. \quad (35)$$

Der Faktor $g(\gamma)$ rührt von der Normierungskonstante C her und wird im Limes $\gamma \rightarrow \infty$ gleich eins:

$$g(\gamma) = \sqrt{2\gamma/\pi} e^\gamma K_2(\gamma). \quad (36)$$

Wegen der Länge der Formeln verzichten wir darauf, die Geschwindigkeitsabhängigkeit einheitlich durch v oder β oder x auszudrücken. Nach Gln. (16) und (19) erhalten wir den Reibungskoeffizienten, den wir in Einheiten von

$$\langle (\Delta u) \rangle_0 = B_0 \cdot \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}} = 8\pi n \left(\frac{e^2}{m}\right)^2 \frac{m}{kT} \log A \quad (37)$$

angeben:

$$\frac{\langle (\Delta u) \rangle}{\langle (\Delta u) \rangle_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma} g(\gamma) \cdot (v/c) \cdot \beta} \left[e^{-x^2} \left\{ 2 - \beta^2 - \frac{\beta}{\gamma} \right\} + \frac{(2/\gamma)^{1/2}}{(v/c)} \left\{ \frac{2}{\gamma} \left(\frac{1}{\beta^2} - \beta\gamma \right) F_1(x, \gamma) - \left(1 - \frac{1}{\beta\gamma} \right) F_0(x, \gamma) \right\} \right]. \quad (38)$$

Die Gln. (28) bis (38) enthalten das Ergebnis dieser Arbeit, soweit es sich analytisch darstellen läßt. Die nichtrelativistischen FOKKER-PLANCK-Koeffizienten erhält man daraus durch den Grenzübergang

$$\begin{aligned} v/c &\rightarrow 0, & \gamma &\rightarrow \infty, \\ x &= \text{endlich}, & \neq 0, \end{aligned} \quad (39)$$

so daß wir für einen Vergleich die Variable x wählen können, welche nach (31) die Wurzel aus dem Verhältnis der kinetischen Energie zu kT bedeutet. Beim Grenzübergang (39) erhalten wir:

$$\frac{\langle (\Delta u)^2 \rangle_{\text{NR}}}{\langle (\Delta u)^2 \rangle_0} = \frac{1}{x} F_0(x, \infty) = \frac{\sqrt{\pi}}{2x} \cdot \Phi(x), \quad (40)$$

$$\frac{\langle (\Delta u_{\parallel})^2 \rangle_{\text{NR}}}{\langle (\Delta u)^2 \rangle_0} = \frac{1}{x^3} F_1(x, \infty) = \frac{\sqrt{\pi}}{2x} \cdot \frac{\Phi(x) - x \cdot \Phi'(x)}{2x^2}, \quad (41)$$

$$\frac{\langle (\Delta u) \rangle_{\text{NR}}}{\langle (\Delta u) \rangle_0} = - \frac{\Phi(x) - x \cdot \Phi'(x)}{2x^2}. \quad (42)$$

Dabei ist $\Phi(x)$ die GAUSSsche Fehlerfunktion:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x d\lambda e^{-\lambda^2}. \quad (43)$$

III. Diskussion der Ergebnisse

Wir haben für vier Werte von $\gamma = m c^2 / k T$ die Integrale (28) und (29) numerisch berechnet und die FOKKER-PLANCK-Koeffizienten (34), (35) und (38) in den Abb. 2, 3 und 4 als Funktionen von x dargestellt (ausgezogene Kurve). Zum Vergleich haben wir die nichtrelativistischen, von γ unabhängigen Kurven (40), (41) und (42) jeweils eingezeichnet (gestrichelte Kurven). Damit haben wir x mit dem nichtrelativistischen Wert

$$\bar{x} = [m \bar{v}^2 / 2 k T]^{1/2} \quad (44)$$

identifiziert, so daß bei diesem Grenzübergang ein thermisches Teilchen ($x=1$) thermisch bleibt, aber mit einer anderen Geschwindigkeit \bar{v} . Man kann natürlich auch $v = \bar{v}$, also $x \neq \bar{x}$, setzen und damit in Kauf nehmen, daß das relative statistische Gewicht eines Teilchens der Geschwindigkeit v gegenüber Nachbarpartikeln im Geschwindigkeitsraum durch den Grenzübergang etwas geändert wird. Diesen Vergleich haben wir in Abb. 1 für B/B_0 bei $\gamma = 3$ durchgeführt (strichpunktierte Kurve).

Die relativistischen Diffusionskoeffizienten zeigen zwei charakteristische Unterschiede gegenüber den nichtrelativistischen:

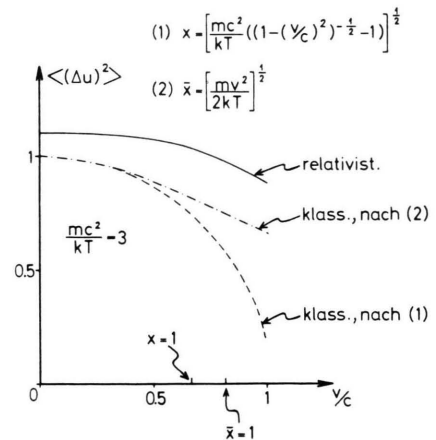


Abb. 1. $\langle (\Delta u)^2 \rangle$ nach Gl. (34) in Einheiten von $\langle (\Delta u)^2 \rangle_0$ [Gl. (33)] als Funktion der Geschwindigkeit v/c (ausgezogene Kurve) für $m c^2 / k T = 3$. Strichpunktierte Kurve: Nichtrelativistische Kurve nach Gl. (40), wobei

$$x = \left[\frac{m c^2}{k T} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\} \right]^{1/2} \quad (1)$$

durch

$$\bar{x} = [m \bar{v}^2 / 2 k T]^{1/2} \quad (2)$$

ersetzt und daraus v bestimmt wurde. Gestrichelte Kurve: Ebenfalls nach Gl. (40), wobei v aus x bestimmt wurde.

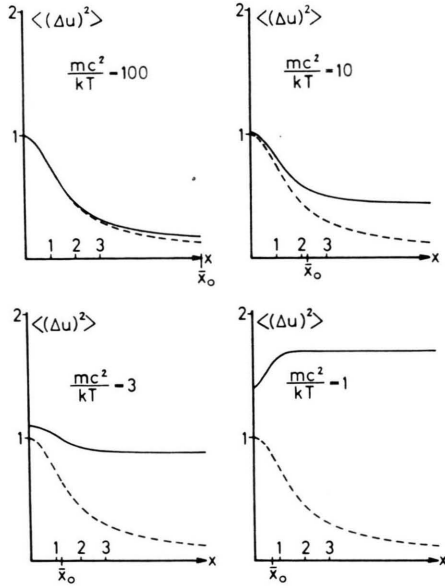


Abb. 2.

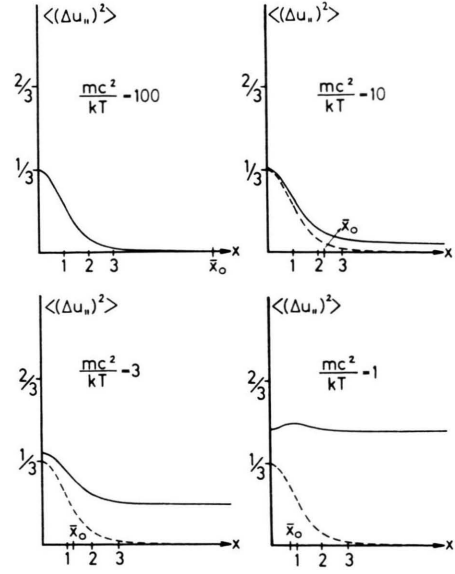


Abb. 3.

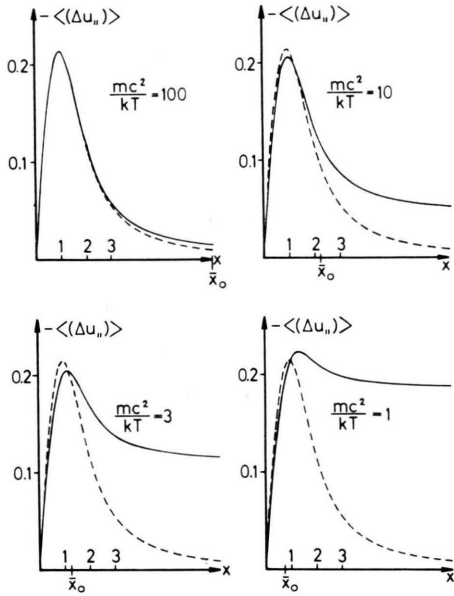


Abb. 4.

Abb. 2, 3 und 4. $\langle (\Delta u)^2 \rangle$, $\langle (\Delta u_n)^2 \rangle$ [Gl. (35)] und $-\langle (\Delta u) \rangle = \langle (\Delta u_n) \rangle (-\mathbf{u}/|\mathbf{u}|)$ [Gl. (38)] als Funktionen von x , jeweils für vier Temperaturen: $m c^2 / k T = 100, 10, 3, 1$. Gestrichelte Kurven: Zugehörige nichtrelativistische Werte nach (40), (41), (42). Auf der Abszissenachse ist die Stelle $\bar{x}_0 = [m c^2 / 2 k T]^{1/2}$ angegeben.

1. Sie stimmen für $v \rightarrow 0$ nicht überein. Dies liegt zum Teil am unterschiedlichen statistischen Gewicht einer vorgegebenen kinetischen Energie; wir können

nämlich die relativistische MAXWELL-Verteilung (4) mit Hilfe des in Gl. (36) definierten Faktors $g(\gamma)$ folgendermaßen schreiben:

$$f_0 = \left(\frac{m}{2 \pi k T} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{g(\gamma)} \cdot e^{-x^2}. \quad (45)$$

Der Faktor $1/g(\gamma)$ beschreibt also gerade den Unterschied der Normierungskonstanten. Der eigentliche Grund liegt also in der unterschiedlichen Beurteilung der kinetischen Energie x bzw. \bar{x} der stoßenden Teilchen, über deren Geschwindigkeit integriert wird. An Stelle von eins erhalten wir im relativistischen Fall

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{B}{B_0} = 3 \cdot \lim_{v \rightarrow 0} \frac{B_{||}}{B_0} = \frac{1}{g(\gamma)} \cdot \left(1 + \frac{2}{\gamma} + \frac{2}{\gamma^2} \right). \quad (46)$$

2. Unterschiede zeigen sich auch im Verhalten für große x . Zwar sind wir am Grenzwert für $x \rightarrow \infty$ nicht eigentlich interessiert, da hier die Abschirmung genauer beschrieben werden müßte, doch befindet sich nach Abb. 2 bei $\gamma = 3$ ein Teilchen mit $x = 2$, also vierfacher thermischer Energie, bereits im asymptotischen Gebiet, wo

$$\frac{B}{B_0} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{B}{B_0} = \frac{e\gamma}{g(\gamma)} \cdot \left(\frac{3}{\gamma} K_1(\gamma) + K_0(\gamma) \right), \quad (47)$$

$$\frac{B_{||}}{B_0} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{B_{||}}{B_0} = \frac{e\gamma}{g(\gamma)} \cdot \frac{K_1(\gamma)}{\gamma} \quad (48)$$

gilt. Dieser Bereich ist jedoch für die nichtrelativistischen Funktionen nur zugänglich, wenn man entweder die relativistische Energieformel verwendet

— also x an Stelle von \bar{x} —, oder $v > c$ zuläßt; beides führt zu den großen Abweichungen im asymptotischen Gebiet. Wie jedoch Abb. 1 zeigt, erhält man eine recht gute Approximation der relativistischen Diffusionskoeffizienten, wenn man die klassischen Werte durch einen Faktor für $\bar{x} = 0$ anpaßt [Gl. (46)] und für

$$\bar{x} > \bar{x}_0 = [m c^2 / 2 k T]^{1/2} \quad (49)$$

konstant gleich dem Wert für $\bar{x} = \bar{x}_0$ setzt, im Zwischengebiet jedoch \bar{x} aus x durch $v = \bar{v}$ berechnet.

Die Reibungskoeffizienten in Abb. 4 stimmen für $x \rightarrow 0$ natürlich überein — ein ruhendes Teilchen

erfährt in einem ruhenden Medium keine Reibung. Für größere als thermische Energien läßt sich die relativistische Kurve jedoch nur ganz grob nach obigem Verfahren approximieren. Im asymptotischen Bereich gilt

$$\frac{\langle \Delta u \rangle}{\langle \Delta u \rangle_0} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\langle \Delta u \rangle}{\langle \Delta u \rangle_0} = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \cdot \frac{e^\gamma}{g(\gamma)} \cdot \frac{K_1(\gamma)}{\gamma}. \quad (50)$$

Den Herren Dr. PFIRSCH und Dr. BISKAMP danke ich für Diskussionen, Frau TROSTEL für Hilfe bei der numerischen Rechnung.

On the Upper Bound for the Ratio of the First Two Membrane Eigenvalues

HANS LUDWIG DE VRIES

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, 8 München 23, Föhringer Ring 6

(Z. Naturforschg. **22 a**, 152—153 [1967]; received 19 October 1966)

Dedicated to Prof. L. BIERMANN on his 60th birthday

Let λ_1 and λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) be the two lowest eigenvalues of a membrane. We show that the inequality $\lambda_2/\lambda_1 < 2.6578$ is always fulfilled, irrespective of the shape of the membrane. This is an improvement upon results due to BRANDS, PAYNE, PÓLYA and WEINBERGER.

1. Let D be a bounded domain in the x, y -plane with sufficiently smooth boundary C . We consider the membrane eigenvalue problem

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0 \quad \text{in } D, \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{on } C. \quad (2)$$

There are infinitely many positive eigenvalues λ_i :

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$$

Let us define

$$\nu := \lambda_2/\lambda_1. \quad (3)$$

PAYNE, PÓLYA and WEINBERGER¹ have shown among many other things that $\nu \leq 3$. Recently BRANDS² sharpened this result to $\nu \leq 2.6861\dots$ by introducing a parameter α into their method. In this note we shall show $\nu < 2.6578$ by introducing another parameter β into the method of BRANDS. This gain seems to be small, but it should be born in mind that $\nu(\text{circle}) = 2.539$, while $\nu(\text{square}) = 2.500$.

2. For abbreviation we shall use the notation

$$\int f := \iint_D f(x, y) \, dx \, dy.$$

The eigenfunction corresponding to λ_1 is denoted by u . It is possible to normalize u such that $u > 0$ in D and $\int u^2 = 1$. Now it is known that

$$\lambda_2 \leq \int (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) / \int \varphi^2, \quad (4)$$

where φ is a sufficiently smooth trial function in $D + C$, being zero on C and orthogonal to u :

$$\varphi = 0 \quad \text{on } C, \quad (5)$$

$$\int u \varphi = 0. \quad (6)$$

As in ¹ and ², (5) is attained by taking multiples of u for φ . We choose as trial functions

$$\varphi := x u^\beta, \quad (7)$$

and

$$\varphi := y u^\beta. \quad (8)$$

Here β ($\beta \geq 1$) is a parameter which is later on taken in an optimal way. As in ¹ and ², (6) is attained by taking as origin of the rectangular coordinate system the center of gravity of D with mass distribution $u^{\beta+1}$:

$$\int x u^{\beta+1} = \int y u^{\beta+1} = 0.$$

¹ L. E. PAYNE, G. PÓLYA, and H. F. WEINBERGER, J. Math. Phys. **35**, 289 [1956].

² J. J. A. M. BRANDS, Arch. Rational Mech. Anal. **16**, 265 [1964].